



Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2025

Oplossingen

9 april 2025

In dit document worden oplossingen voorgesteld voor de vragen van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2025. Het spreekt voor zich dat andere methodes eventueel ook tot correcte oplossingen kunnen leiden.

Vlaamse Sterrenkunde Olympiade
Vereniging Voor Sterrenkunde
Zeeweg 96
8200 Brugge

Het organiserend comité van de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2025: Wout Goesaert (VVS), Tinne Pauwels (KU Leuven), Frank Tamsin (VVS), Stefan van der Giessen (UGent), Cassandra Van der Sijpt (KU Leuven).

<http://www.sterrenkundeolympiade.be>
info@sterrenkundeolympiade.be

Meerkeuze vragenreeks

1. Waarom is de rand van de zonneschijf donkerder en roder (= minder blauw) dan het midden?
- a) Het licht aan de rand van de Zon is meer gepolariseerd en wordt door onze atmosfeer dus gedeeltelijk weggefilterd.
 - b) Door blauwverschuiving is het centrum van de Zon helderder omdat dit materiaal naar ons toe beweegt (zonnewind), de rand lijkt hierdoor automatisch donkerder en roder.
 - c) Aan de rand van de Zon kijk je minder diep de Zon in, hierdoor zie je koelere en donkerdere lagen aan de rand.**
 - d) Het zonlicht aan de rand van de Zon moet verder door de corona van de Zon bewegen en wordt daardoor afgezwakt.
 - e) De juiste reden is hierboven niet gegeven.

Dit fenomeen wordt randverzwakking genoemd.

2. De atmosfeer van Mars bestaat voornamelijk uit
- a) stikstof
 - b) zuurstof
 - c) koolstofdioxide**
 - d) koolstofmonoxide
 - e) zwavelzuur

De atmosfeer bestaat vooral uit koolstofdioxide en een klein beetje stikstof. Er is bijna geen zuurstof.

3. Wat verstaat men onder de astronomische term barycentrum?
- a) De plaats waar de zwaartekrachtspotentieel van meerdere objecten nul is.
 - b) Het massacentrum van meerdere objecten die in een baan om elkaar bewegen.**
 - c) De centrale rotatie-as van een roterend stellair object.
 - d) De centrale as van de precessie van een roterend stellair object.
 - e) Het centrum van ons Melkwegstelsel.

Het massamiddelpunt, gemeenschappelijk zwaartepunt, massacentrum of barycentrum (anglicisme) van een groep puntmassa's wordt bepaald door het gewogen gemiddelde van de plaatsvectoren van de afzonderlijke zwaartepunten. De weegfactor is de massa.

4. De Zon heeft een oppervlaktetemperatuur van ongeveer 6000 K en haar straling piekt in het zichtbare spectrum. Rond 1940 ontdekten astronomen dat de Zon ook een bron van röntgenstraling is. Tegenwoordig wordt aangenomen dat deze röntgenstraling afkomstig is van de zonnecorona, waar temperaturen kunnen oplopen tot in de orde van 10^6 K. Ervan uitgaande dat de corona als een zwarte straler mag beschouwd worden, op welke golflengte bereikt die röntgenstraling dan haar piek?

- a) **2,9 nm**
- b) 2,9 μm
- c) 2,9 mm
- d) 2,9 m
- e) 2,9 km

Dit kan berekend worden met de verschuivingswet van Wien. De Planck functie vertoont een piek in intensiteit bij een bepaalde golflengte λ_{max} . De verschuivingswet van Wien is een wet die deze golflengte λ_{max} relateert aan de temperatuur van de zwarte straler, namelijk $\lambda_{\text{max}} T = 2,89777 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$.

5. Welk spectraal gebied aan de hemel kan vanaf de Aarde worden waargenomen, zelfs als er wolken aan de hemel zijn?

- a) Gamma-golflengten
- b) **Radiogolflengten**
- c) Ultraviolette golflengten
- d) Röntgengolflengten
- e) Geen enkele van bovenstaande golflengte-gebieden

Korte golflengten worden (gelukkig) grotendeels geblokkeerd door de aardse atmosfeer.

6. De Extremely Large Telescope (ELT) is een optische telescoop die in aanbouw is in Chili. De primaire spiegel zal een diameter van 39,3 m hebben, waarmee het de grootste optische telescoop wordt die ooit is gebouwd. Een van de doelen van deze telescoop is het direct in beeld brengen van exoplaneten. Beschouw een exoplaneet op een afstand van 1 AE van een ster. Wat is de maximale afstand van de Aarde van zo'n ster-exoplanetensysteem waarbij de ELT de exoplaneet afzonderlijk van de ster kan onderscheiden? Atmosferische seeing mag genegeerd worden en er mag aangenomen worden dat er waargenomen wordt bij optische golflengte 500 nm.

- a) 112 pc
- b) 212 pc
- c) **312 pc**
- d) 412 pc
- e) 512 pc

Gebruik het Rayleigh-criterium om de beste resolutie te berekenen: $\theta_m = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ waarbij D de diameter van de primaire spiegel is. De maximale afstand d tot het sterrenstelsel wordt berekend via $d \cdot \theta_m = 1 \text{ AE}$. Verder weten we dat 1 pc = 206265 AE, waaruit het resultaat volgt.

7. Een astronoom wil een telescoop ontwerpen zodat de volle maan het hele gezichtsveld van de telescoop vult. Ze gebruikt een oculair met een gezichtsveld van 60° . Als de brandpuntsafstand van het oculair 25 mm bedraagt, wat is dan de brandpuntsafstand van de gekozen telescoop? Er is bekend dat de hoekdiameter van de Maan $0,5^\circ$ bedraagt.

- a) 2000 mm
- b) 1500 mm
- c) 6000 mm
- d) 3000 mm**
- e) 1000 mm

De bereikte vergroting m kan op basis van de brandpuntsafstanden f van de telescoop en het oculair, of aan de hand van de gezichtsvelden FOV :

$$m = \frac{f_{\text{telescoop}}}{f_{\text{oculair}}} = \frac{FOV_{\text{oculair}}}{FOV_{\text{telescoop}}}$$

8. We observeren ster A met parallax p_A en schijnbare magnitude m_A en ster B met parallax p_B en schijnbare magnitude m_B . Er is gegeven dat $p_A = 15 p_B$ en $m_A = m_B + 5$. Wat kunnen we zeggen over de absolute magnitudes van deze sterren?

- a) De absolute magnitude van ster A is groter dan de absolute magnitude van ster B.**
- b) De absolute magnitude van ster B is groter dan de absolute magnitude van ster A.
- c) Ster A en ster B hebben dezelfde absolute magnitude.
- d) Er is onvoldoende informatie gegeven om de absolute magnitudes te bepalen.

We maken gebruik van de formule voor de absolute magnitude en vinden

$$\begin{aligned} M_A &= m_A + 5 + 5 \log p_A \\ &= (m_B + 5) + 5 + 5 \log(15 p_B) \\ &= m_B + 5 + 5 \log p_B + 5 \log 15 + 5 \\ &= M_B + 5 \log 15 + 5 \end{aligned}$$

9. We meten de parallax van twee sterren die op 5 graden van elkaar staan aan de hemel. De eerste ster heeft een parallax van 0,11 boogseconde en de tweede heeft een parallax van 0,13 boogseconde. Hoe ver staan deze twee sterren van elkaar in de ruimte?

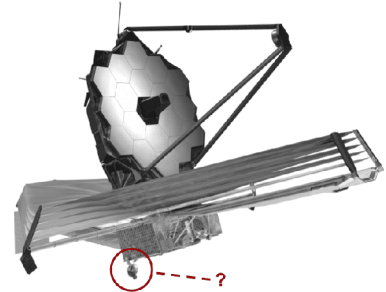
- a) 1,58 lichtjaar
- b) 4,56 lichtjaar
- c) 5,14 lichtjaar**
- d) 16,78 lichtjaar
- e) Dit is onmogelijk te bepalen op basis van de gegeven informatie.

De afstanden d_1 en d_2 (uitgedrukt in parsec) van de twee sterren kunnen berekend worden uit de parallaxen p_1 en p_2 (uitgedrukt in boogseconden) als $d_1 = 1/p_1$ en $d_2 = 1/p_2$. Als dan ϕ de hoek is tussen de twee sterren, dan volgt de ruimtelijke afstand D tussen de twee sterren uit de cosinusregel voor driehoeken: $D^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \phi$.

We vinden $D \approx 1,58$ parsec. Uit $1 \text{ parsec} \approx 3,26$ lichtjaar volgt het resultaat.

10. Wat is de naam van de JWST-component die hiernaast is aangeduid?

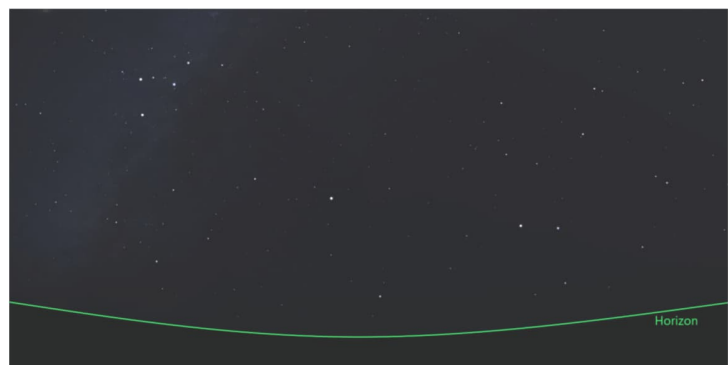
- a) Stabilisatieklep
- b) Spacecraft bus
- c) Antenne**
- d) Star tracker
- e) Geen van bovenstaande



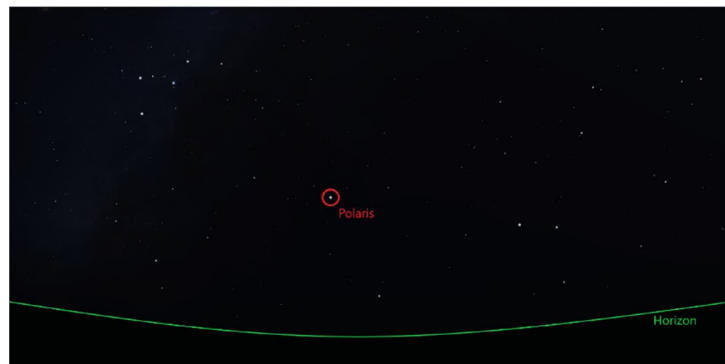
11. Beschouw de opname van hiernaast van de nachtelijke hemel en waarop de positie van de horizon is aangeduid).

Wat is de beste schatting voor de breedteligging van de plaats van waaruit deze opname werd gemaakt?

- a) 70° zuiderbreedte
- b) 20° zuiderbreedte
- c) 2° noorderbreedte
- d) 20° noorderbreedte**
- e) 70° noorderbreedte



De breedteligging van de waarnemer komt overeen met de hoogte van de hemelpool boven de horizon. De noordelijke hemelpool ligt heel dicht bij Polaris (α UMi). Omdat de noordelijke hemelpool boven de horizon ligt, bevindt de waarnemer zich op het noordelijk halfrond. Polaris ligt duidelijk veel hoger dan 2° boven de horizon, maar lager dan 70°, dus het enige mogelijke antwoord is 20° noorderbreedte.



12. Beschouw het dubbelstersysteem Kepler-16, met hoofdstel Kepler-16A en secundaire ster Kepler-16B. Het systeem heeft een omlooptijd $P = 41,08$ dagen en de gemeten parallax bedraagt $p = 13,29$ milliboogseconden. Bereken de totale massa van de sterren, gebruikmakend van het feit dat hun maximale hoekafstand gemeten vanaf de Aarde $\theta = 2,98$ milliboogseconden is en dat we zijdelings tegen de baan aankijken. Er mag uitgegaan worden van cirkelvormige banen.

- a) $0,756 M_{\odot}$
- b) $0,803 M_{\odot}$
- c) $0,891 M_{\odot}$**
- d) $0,987 M_{\odot}$
- e) $1,326 M_{\odot}$

Vanuit de definitie van parallax p wordt de afstand d van het systeem gegeven door $d = 1/p \approx 75$ pc.

Daaruit volgt de afstand a (uitgedrukt in astronomische eenheden) tussen de sterren op het moment van maximale scheiding als $a = d \cdot \theta \approx 0,22423$ AE.

Aangezien de waarnemingen van de Kepler-satelliet gebaseerd zijn op de transitmethode komt dit zo goed als overeen met de werkelijke fysieke afstand tussen de sterren.

Aangezien ze zich op een edge-on baan bevinden, is de geprojecteerde afstand gelijk aan de fysieke afstand van de sterren. We kunnen dus eenvoudig de derde wet van Kepler toepassen:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

waarbij G de universele gravitatieconstante voorstelt.

We bekomen als massa $M \approx 1,77 \cdot 10^{30}$ kg. Verder weten we uiteraard dat $1 M_{\odot} \approx 1,989 \cdot 10^{30}$ kg.

13. Een ster op een afstand van 2000 pc ondergaat een supernova-explosie. De supernova heeft een absolute magnitude van $M = -17$. Welke van de volgende beweringen is waar? (De interstellaire extinctie mag hierbij verwaarloosd worden.)

- a) De supernova zal helderder zijn aan de hemel dan de planeet Venus (schijnbare magnitude $m = -4$).**
- b) De supernova zal minder helder zijn aan de hemel dan de planeet Venus (schijnbare magnitude $m = -4$).
- c) De supernova en de planeet Venus (schijnbare magnitude $m = -4$) zullen even helder zijn aan de hemel.
- d) Er is onvoldoende informatie gegeven om te bepalen welke van bovenstaande beweringen waar is.

We maken gebruik van de formule die het verband weergeeft tussen de absolute magnitude M , de schijnbare magnitude m en de afstand d (uitgedrukt in parsec):

$$M = m + 5 - 5 \log d$$

Hieruit vinden we

$$m = M - 5 + 5 \log d \approx -5,5$$

Dit impliceert dat de supernova helderder zal zijn dan de planeet Venus.

14. Stel dat een ster een temperatuur heeft van 10000 K en een straal van 1,5 keer de straal van de Zon. Hoe groot is dan de lichtkracht van die ster?

- a) $3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$
- b) $8,61 \cdot 10^{26} \text{ W}$
- c) $3,45 \cdot 10^{27} \text{ W}$
- d) $7,77 \cdot 10^{27} \text{ W}$**
- e) $1,75 \cdot 10^{28} \text{ W}$

De wet van Stefan-Boltzmann geeft het verband tussen de lichtkracht L , de straal R en de effectieve temperatuur T van een ster:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2)$$

waarbij $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ de constante van Stefan-Boltzmann (of eerste stralingsconstante) voorstelt. De straal van de Zon bedraagt $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

15. Welke uitspraak over zware sterren ($> 8 M_{\odot}$) is niet correct?

- a) Zware sterren komen veel minder vaak voor dan sterren met een lagere massa.
- b) Zware sterren hebben een grotere kern en zullen dus langer leven dan de Zon.**
- c) Zware sterren komen bijna altijd voor in dubbelstersystemen.
- d) Zware sterren kunnen aan het einde van hun leven een neutronenster of een zwart gat vormen.
- e) Alle bovenstaande uitspraken zijn correct.

Hoewel zware sterren inderdaad een grotere kern hebben, leven ze veel korter dan lichte sterren zoals de Zon. Dit komt omdat hun kernfusie extreem snel verloopt, waardoor ze hun brandstof in enkele miljoenen jaren opgebruiken.

De antwoordalternatieven voor deze vraag geven eigenlijk aanleiding tot een paradoxale situatie. Immers, aangezien b fout is, is e dan vanzelfsprekend ook fout.

16. We bekijken de spectra van twee dicht bij elkaar gelegen hoofdreekssterren A en B (waarvan mag aangenomen worden dat het zwarte lichamen zijn). Ster A heeft zijn piek op een frequentie die twee keer zo hoog is als die van ster B. Door naar de diepte van spectraallijnen te kijken, kunnen we ook bepalen dat A een hoger metaalgehalte heeft dan B. We doen de volgende twee uitspraken:

- (I) De absolute magnitude van ster A is groter dan de absolute magnitude dan ster B.
- (II) Ster A is ouder dan ster B.

Welke van volgende beweringen is dan correct?

- a) Beide uitspraken zijn waar.
- b) Beide uitspraken zijn onwaar.**
- c) Uitspraak (I) is waar en uitspraak (II) is onwaar.
- d) Uitspraak (I) is onwaar en uitspraak (II) is waar.
- e) Er is niet voldoende informatie om hierover een oordeel te kunnen vellen.

Ster A heeft een piek op een hogere frequentie (kortere golflengte), dus heeft het een hogere temperatuur volgens de wet van Wien. Dus volgens de wet van Stefan Boltzmann kunnen we zeggen dat ster A een grotere lichtkracht heeft. Dit betekent een lagere absolute magnitude. Ster A heeft een hogere metaalgehalte, dus is de ster jonger (nieuwere sterren kunnen metalen gebruiken die zijn ontstaan in supernovae, en hebben dus een hoger metaalgehalte).

17. Bij de geboorte van een ster wordt er een grote schijf van stof en gas om de ster gevormd. Dit is het materiaal waaruit planeten ontstaan. Dat is de reden dat dit een protoplanetaire schijf heet. Wat is de reden dat het gas in de vorm van een schijf rondom de ster draait?

- a) Door het behoud van impulsmoment van de oorspronkelijke gaswolk.**
- b) De materie van de schijf wordt op hoge snelheid uit de ster gespuwd.
- c) Het gas draait mee met de magneetvelden van de ster.
- d) Door de aantrekkingskracht van de ster.
- e) Dat is een perspectiefeffect door onze kijkrichting.

Een moleculaire wolk heeft een zwakke rotatie door turbulente bewegingen in het interstellair medium. Wanneer de wolk onder zijn eigen zwaartekracht instort, neemt de rotatiesnelheid toe. Het materiaal kan niet allemaal recht naar het centrum vallen vanwege het hoekmoment. In plaats daarvan vlakt het af tot een schijf loodrecht op de rotatie-as, omdat dit de laagste energietoestand is voor roterend gas.

18. Herbig sterren zijn relatief zware sterren die een overmaat aan infrarood licht hebben vergeleken met andere sterren. Waardoor wordt deze overmaat veroorzaakt?

a) Deze sterren zijn relatief koud doordat ze enorm groot zijn, ze stralen daarom meer infrarood licht uit dan normale sterren.

b) Dit is een optische illusie: er bevinden zich grote stofwolken tussen de ster en de Aarde waardoor het licht met kortere golflengtes meer geabsorbeerd wordt, waardoor de ster er (infra)roder uit ziet (denk ook aan een zonsondergang).

c) Deze sterren bevatten zware metalen die bij hoge temperaturen vooral in het infrarood licht uitstralen.

d) Rondom dit soort sterren is een grote gasschijf die redelijk koud is en dus infrarood licht uitstraalt.

e) De uitspraak is niet correct: Herbig sterren stralen niet meer in het infrarood dan andere sterren.

Herbig-sterren zijn omgeven door een dichte, stofrijke schijf van materiaal (vergelijkbaar met T Tauri-sterren, maar dan bij zwaardere sterren). Dit stof absorbeert het sterlicht en zendt het opnieuw uit in het infrarood (thermische straling).

19. Hoe verhoudt de massa van de kern van een heliumatoom zich tot de som van de massa's van vier waterstofkernen, en waarom?

a) De heliumkern heeft iets meer massa, vanwege de invloed van zwaartekracht.

b) De heliumkern heeft dezelfde massa als de vier waterstofkernen, omdat de componenten in beide systemen uiteindelijk dezelfde zijn.

c) De heliumkern heeft iets minder massa, omdat de bindingsenergie een negatieve bijdrage levert aan de massa.

d) De heliumkern heeft dezelfde massa als één waterstofkern, omdat elke atoomkern dezelfde massa heeft.

e) Geen van bovenstaande antwoorden is correct.

In een heliumkern houden sterke kernkrachten de nucleonen bijeen. Om de kern te splitsen, moet energie worden toegevoegd (vergelijkbaar met het optillen van een steen tegen de zwaartekracht in). Deze energie komt overeen met het massadefect, wat de stabiliteit van de heliumkern verklaart.

20. Een exoplaneet werd waargenomen tijdens zijn transit over het oppervlak van een heldere ster. Vanop Aarde gezien vertegenwoordigt het gebied dat door de exoplaneet op het geprojecteerde oppervlak van de ster wordt bedekt, $\eta = 2\%$ van het geprojecteerde oppervlak van de ster. Schat op basis hiervan de variatie van de schijnbare magnitude (Δm) van de ster, veroorzaakt door de overgang van de exoplaneet.

- a) $\Delta m = -4,247$
- b) $\Delta m = 0,003$
- c) $\Delta m = 0,022$**
- d) $\Delta m = 0,679$
- e) $\Delta m = -0,003$

De formule van Pogson beschrijft het verband tussen het verschil in magnitude (schijnbare helderheid) van twee objecten en de verhouding van hun lichtfluxen (ontvangen energie per oppervlakte-eenheid). Als m_0 en m respectievelijk de schijnbare magnitude van de onbedekte en van de bedekte ster voorstellen, en F_0 en F de ontvangen lichtfluxen, dan geldt dat

$$\Delta m = m - m_0 = -2,5 \log \frac{F}{F_0}$$

Verder is $F = (1 - \eta)F_0$ zodat $\Delta m = -2,5 \log(0,98) \approx 0,022$.

21. NASA's TESS satelliet ontdekte in 2020 een ongewone gasreus-exoplaneet, TOI-2109 b, die om een F-type ster draait. TOI-2109 b heeft 16 uur nodig, de kortste periode ooit gemeten voor een gasreus-exoplaneet, om één omloop om zijn moederster te voltooien. De gemiddelde afstand van TOI-2109 b tot zijn ster bedraagt $2,67 \cdot 10^6$ km. Hoe snel, in km/s, beweegt deze planeet?

- a) 46 km/s
- b) 146 km/s
- c) 291 km/s**
- d) 582 km/s
- e) 17475 km/s

De baansnelheid wordt bekomen door de omtrek van de baan te delen door de periode. Omzetten naar de juiste eenheden (1 uur is 3600 seconden) levert het resultaat.

22. $H\alpha$ is een prominente absorptielijn in het spectrum van de Zon bij golflengte $\lambda = 656,281 \text{ nm}$. Veronderstel dat voor een waarnemer op α Centauri het baanvlak Jupiter-Zon in de gezichtslijn ligt, dan zal deze waarnemer een periodieke verschuiving waarnemen in de golflengte van de $H\alpha$ -lijn. Hoe groot is deze verschuiving?

- a) $2,7 \cdot 10^{-5} \text{ nm}$
- b) $2,7 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$
- c) $2,7 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$
- d) $2,7 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$
- e) Dit is niet correct: de waargenomen golflengte blijft onveranderd.

Jupiter veroorzaakt een periodieke beweging van de Zon rond het massamiddelpunt van het zonnestelsel. Als we de Zon in de oorsprong plaatsen, dan kunnen we de afstand $v_{\odot}$ van de Zon rond het massamiddelpunt afleiden uit de vergelijking

$$M_{\odot} \cdot 0 + M_J v_J = (M_{\odot} + M_J) v_{\odot}$$

waarbij $M_J = 1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ de massa van Jupiter voorstelt en v_J de baansnelheid van Jupiter rond de Zon. Deze snelheid kan afgeleid worden uit de gemiddelde afstand van Jupiter tot de Zon $r_J = 778 \cdot 10^9 \text{ m}$ en de omlooperperiode $P_J = 4332,71$ dagen van Jupiter rond de Zon. We vinden aldus $v_J \approx 13 \text{ km/s}$. Ook de massa van de Zon $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ is uiteraard bekend. Voor de snelheid van de Zon rond het massamiddelpunt vinden we dan $v_{\odot} \approx 12,5 \text{ m/s}$.

De verschuiving $\Delta\lambda$ van de spectraallijn kunnen we dan berekenen aan de hand van de (niet-relativistische) formule voor het dopplereffect

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\odot}}{c}$$

waarbij c de lichtsnelheid is.

23. Welk type sterrenstelsel wordt getoond op de figuur hiernaast?

- a) **Spiraalsstelsel**
- b) Balkspiraalsstelsel
- c) Lenticulair stelsel
- d) Elliptisch stelsel
- e) Onregelmatig stelsel



Bij de classificatie van Hubble is een balkspiraalsstelsel een sterrenstelsel dat net als spiraalsstelsels spiraalarmen bezit, maar waarbij deze niet van het centrum lijken te komen, maar vanuit een 'balk' die door het centrum gaat.

24. De massadichtheid van het Melkwegstelsel bepaalt de baansnelheid van sterren en andere objecten die om het centrum van het Melkwegstelsel draaien. Uitgaande van een constante oppervlaktemassadichtheid σ voor het Melkwegstelsel en het modelleren ervan als een perfecte cirkelvormige schijf, waarmee is de circulaire baansnelheid $v(r)$ van een massapunt op straal r van het centrum van het Melkwegstelsel dan evenredig?

- a) $1/\sqrt{r}$
- b) $1/r$
- c) $\sqrt{r}$**
- d) r
- e) $r^{3/2}$

De gravitatiekracht F_g die een massa m op afstand r ervaart, wordt gegeven door de algemene gravitatiewet van Newton

$$F_g = G \frac{M(r) \cdot m}{r^2}$$

waarbij $M(r)$ de ingesloten massa binnen een straal r voorstelt.

Voor een cirkelbaan geldt dat deze kracht gelijk is aan de benodigde middelpuntzoekende kracht

$$F_c = \frac{m \cdot (v(r))^2}{r}$$

Door $F_g = F_c$ te stellen, bekomen we

$$G \frac{M(r) \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot (v(r))^2}{r}$$

waaruit volgt

$$(v(r))^2 = G \frac{M(r)}{r}$$

Voor een schijf met oppervlaktemassadichtheid σ is de ingesloten massa $M(r)$ binnen een straal r gelijk aan

$$M(r) = \sigma \cdot \pi \cdot r^2$$

Substitutie hiervan in de vorige vergelijking leidt tot

$$(v(r))^2 = G \cdot \sigma \cdot \pi \cdot r$$

waaruit het resultaat lijkt te volgen.

In de redenering zoals hierboven uitgeschreven, is evenwel een denkfout geslopen.

Bij de eerste stap wordt ervan uitgegaan dat de gravitatiewet van Newton kan gebruikt worden voor de ingesloten massa $M(r)$ binnen een straal r .

Dit idee vloeit voort uit de zogenoemde “Shell Theorem” van Newton. Dit is een belangrijk resultaat uit de klassieke mechanica dat de zwaartekracht beschrijft die door een sferisch symmetrisch object wordt uitgeoefend: een massieve bol met sferisch symmetrische massaverdeling oefent op een puntmassa buiten de bol een zwaartekracht uit alsof alle massa van de bol in het middelpunt geconcentreerd is.

Dit resultaat geldt evenwel enkel voor een sferisch symmetrische massaverdeling. Een platte schijf, zoals gegeven in de vraag is niet sferisch symmetrisch en het gevolg is dan ook dat een dunne schijf van constante dichtheid een heel andere rotatiecurve heeft.

Om dit reden werd deze vraag verder buiten beschouwing gelaten.

25. Waaruit bestaat de kosmische achtergrondstraling voornamelijk?

- a) Hoogenergetische deeltjes zoals gammastraling, protonen en elektronen.
- b) Röntgenstraling
- c) Infrarode straling
- d) Microgolven**
- e) Geen van bovenstaande

De kosmische achtergrondstraling is een bijna perfect zwartlichaamspectrum met een temperatuur van 2,725 K, wat overeenkomt met microgolfstraling (golflengte ~ 1 mm).

26. We beschouwen een interstellaire gas- en stofwolk waar licht van een bepaalde golflengte doorheen schijnt van een veraf gelegen bron. De wolk blokkeert de helft van het invallende licht. Als we nu een identieke kopie van deze wolk iets verderop in het pad van het licht zetten, hoeveel van het oorspronkelijk invallende licht komt er dan nog door de 2 wolken heen?

- a) 33%
- b) 50%
- c) 100%
- d) 25%**
- e) 0%

De eerste wolk blokkeert de helft van het invallende licht. Dit betekent dat er nog 50% van het oorspronkelijke licht doorheen komt. De tweede wolk is identiek aan de eerste en blokkeert dus ook de helft van het licht dat erop valt. Het licht dat op de tweede wolk valt, is al verzwakt tot 50% van de oorspronkelijke intensiteit. De tweede wolk blokkeert daarvan weer de helft, dus $50\% \times 50\% = 25\%$ van het oorspronkelijke licht wordt doorgelaten. Na beide wolken blijft er dus 25% van het oorspronkelijke licht over.

27. Een voorwerp zendt licht uit met een golflengte van 200 nanometer. Je ontvangt het licht op 1000 nanometer. Wat is de roodverschuiving z ?

- a) $z = 0,2$
- b) $z = 1,2$
- c) $z = 4$**
- d) $z = 5$
- e) $z = 6$

De roodverschuiving z wordt gedefinieerd als

$$z = \frac{\lambda_{\text{ontvangen}} - \lambda_{\text{uitgezonden}}}{\lambda_{\text{uitgezonden}}}$$

Aldus vinden we $z = (1000 - 200) / 200 = 4$.

28. Gebaseerd op ons tegenwoordige begrip van het universum kunnen wij zeggen dat

- a) het universum, gemeten op de grootste schalen, gekromd blijkt te zijn.
- b) in het vroege universum de donkere energie domineerde.
- c) de kosmische achtergrondstraling volkomen isotroop is.

d) de Hubble-parameter verandert met de tijd.

e) de vorming van de zwaarste elementen (zoals lood) vlak na de oerknal plaatsvond, dankzij de enorm hoge temperaturen die toen heersten.

Metingen van de kosmische achtergrondstraling tonen aan dat het universum vlak is (Euclidisch) op de grootste schalen, binnen meetonzekerheden. Dit past bij het inflatiemodel.

Donkere energie werd pas dominant in een later stadium (ca. 5-6 miljard jaar geleden). In het vroege universum domineerde straling en later materie.

De kosmische achtergrondstraling vertoont kleine anisotropieën (temperatuurvariaties van ~ 1 op 100000), die cruciaal zijn voor structuurvorming in het universum.

De Hubble-parameter $H(t)$ is tijdafhankelijk. In het vroege universum was deze veel groter (door stralingsdominantie), nu neemt deze af (maar benadert een constante waarde door donkere energie).

De zwaarste elementen (zwaarder dan ijzer) worden voornamelijk gevormd in supernova-explosies of neutronensterbotsingen, niet tijdens de oerknal. De oerknal produceerde vooral waterstof, helium en sporen van lithium (big bang-nucleosynthese).

29. Naast grote astronomische objecten zijn astrofysici ook geïnteresseerd in kleine deeltjes uit de ruimte. Welk van deze deeltjes vertonen de zwakste interacties met andere deeltjes?

- a) μ muonen
- b) antideeltjes
- c) ν neutrino's**
- d) π pionen
- e) protonen

Neutrino's (ν) zijn elektrisch neutrale, bijna massaloze deeltjes die alleen interageren via de zwakke kernkracht en zwaartekracht. Hierdoor kunnen ze vrijwel ongehinderd door materie heen bewegen, zelfs door hele sterren of planeten.

30. De roodverschuiving van de kosmische microgolfachtergrondstraling is $z = 1100$ is en de huidige temperatuur ervan bedraagt $2,73$ K. Bereken hiermee de temperatuur van het heelal op het ogenblik dat fotonen en materie ontkoppeld werden en er zich neutraal waterstof begon te vormen.

- a) 10000 K
- b) 30000 K
- c) 3000 K**
- d) 1000 K
- e) 300 K

Om de temperatuur van het heelal op het moment van ontkoppeling van fotonen en materie (het tijdperk van recombinitie, toen neutraal waterstof ontstond) te berekenen, gebruiken we de relatie tussen roodverschuiving z en temperatuur T : $T_{vroeger} = T_{nu} \times (1 + z)$.

Vraag	Antwoord	Bronvermelding
1.	C	
2.	C	
3.	B	
4.	A	
5.	B	
6.	C	
7.	D	
8.	A	
9.	C	
10.	C	
11.	D	
12.	C	
13.	A	
14.	D	
15.	B	
16.	B	
17.	A	
18.	D	
19.	C	
20.	C	
21.	C	
22.	A	
23.	A	
24.	C	
25.	D	
26.	D	
27.	C	
28.	D	
29.	C	
30.	C	

Open vragenreeks I: dubbelsterren

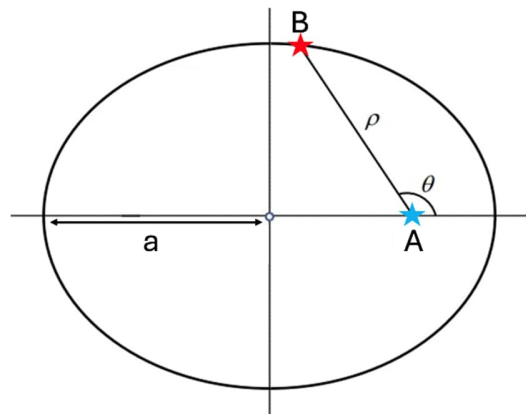
Een visuele dubbelster bestaat uit twee door zwaartekracht gebonden sterren waarbij beide componenten apart met een telescoop te zien zijn. Visuele dubbelsterren bestaan meestal uit sterren die relatief ver uit elkaar staan en periodes hebben van enkele tientallen tot duizenden jaren.

We bekijken een visuele dubbelster op een afstand van 500 parsec. De op de hemel geprojecteerde afstand tussen de twee sterren bedraagt 2,0 boogseconden. We observeren dat de primaire ster (A) een lichtkracht heeft van 500 $L_{\odot}$, terwijl de secundaire ster (B) een lichtkracht heeft die 20 keer lager is.

De figuur hiernaast geeft een voorstelling weer van de relatieve baan van ster B rond ster A. De baan is een ellips met ster A in één van de brandpunten. Ster A staat in werkelijkheid niet stil, maar beweegt ook rond het gemeenschappelijke massacentrum van het dubbelstersysteem. De afstand ρ tussen beide sterren wordt gegeven door

$$\rho(\theta) = \frac{a \cdot \sqrt{1-e^2}}{1 + e \cos \theta}$$

Hierbij stelt a de lengte van de halve lange as van de ellips voor en e de excentriciteit, een parameter die weergeeft in welke mate de baan afwijkt van een cirkel. θ duidt de hoek aan tussen de huidige positie van ster B en de plek waar de afstand tussen ster A en B het kortst is (ook wel het periastron genoemd).



Relatieve baan van ster B rond ster A.
Figuur aangepast van Z.-C. Liang

In deze opgave mag verondersteld worden dat de inclinatie van de baan van de dubbelster 0 graden is. De op de hemel geprojecteerde ellips is dus gelijk aan de ellips in de figuur.

Vraag 1.

Bereken de afstand ρ tussen beide componenten van de dubbelster in astronomische eenheden (AE).

De afstand ρ tussen beide componenten (uitgedrukt in astronomische eenheden) bedraagt

$$\rho = 500 \text{ pc} \cdot 2'' = 1000 \text{ AE}.$$

Vraag 2.

Stel dat je de dubbelster hebt geobserveerd op het moment dat $\theta = 150^\circ$ en dat de excentriciteit e gelijk is aan 0,15. Bepaal dan de lengte van de halve lange as a in AE.

Het omvormen van de hoger vermelde formule leidt tot

$$a = \frac{\rho \cdot (1 + e \cos \theta)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Invullen van de gegevens levert dan

$$a = \frac{1000 \text{ AE} \cdot (1 + 0,15 \cos 150^\circ)}{\sqrt{1 - (0,15)^2}} = 880 \text{ AE}$$

Vraag 3.

Bepaal de massa's van beide sterren met behulp van volgende massa-lichtkrachtrelatie:

$$\frac{L}{L_\odot} = 1,5 \cdot \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{3,5}$$

Druk je resultaat uit in zonsmassa's ($M_\odot$).

Uit de gegeven formule leiden we af:

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{L}{1,5 \cdot L_\odot} \right)^{\frac{1}{3,5}}$$

Voor ster A bekomen we

$$M_A = \left(\frac{500 L_\odot}{1,5 L_\odot} \right)^{1/3,5} M_\odot = 5,26 M_\odot$$

Voor ster B bekomen we

$$M_B = \left(\frac{25 L_\odot}{1,5 L_\odot} \right)^{1/3,5} M_\odot = 2,23 M_\odot$$

Vraag 4.

- a) Geef de formules voor de centripetale kracht en gravitatiekracht van de dubbelster in het geval de relatieve baan van ster B cirkelvormig zou zijn met straal a .

Tip: de werkelijke baan van het dubbelstersysteem komt overeen met de relatieve baan in de figuur hierboven indien de massa van ster A gelijkgesteld wordt aan de totale massa

$$M = M_A + M_B$$

en die van ster B aan de gereduceerde massa

$$\mu = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$$

Wanneer je gebruikmaakt van deze massa's, mag ster A dus als stationair beschouwd worden.

Met behulp van de tip vinden we voor de centripetale kracht:

$$F_c = \mu \cdot a \cdot \omega^2 = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \cdot a \cdot \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2$$

De gravitatiekracht is gelijk aan:

$$F_g = \frac{G \cdot M \cdot \mu}{a^2} = \frac{G \cdot (M_A + M_B) \cdot \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}}{a^2} = \frac{G \cdot M_A M_B}{a^2}$$

- b) Leid daaruit een formule af om de periode van de dubbelster te bepalen in functie van a en de massa's van beide sterren.

Om de periode te bepalen, stellen we de centripetale kracht gelijk aan de gravitatiekracht:

$$\frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \cdot a \cdot \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{G \cdot M_A M_B}{a^2}$$

zodat

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{G \cdot (M_A + M_B)}{a^3}$$

waaruit volgt

$$P^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{G \cdot (M_A + M_B)}$$

en uiteindelijk

$$P = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot (M_A + M_B)}}$$

- c) Gebruik daarna je formule om de periode uit te rekenen. Geef je antwoord in jaren.

De gevonden formule kunnen we nu gebruiken voor het berekenen van de periode:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(880 \text{ AE})^3}{6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot (5,26 + 2,23) \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{2.2959371 \cdot 10^{21} \text{ s}^2} \\ &= 30 \cdot 10^{10} \text{ s} \\ &= 9547 \text{ jaar} \end{aligned}$$

Vraag 5.

Ster B zal niet overal in zijn baan dezelfde snelheid hebben. Duid aan op de figuur in welk deel van de ellips ster B de meeste tijd zal doorbrengen. Verklaar je antwoord.

Ster B zal de meeste tijd doorbrengen wanneer hij het verste weg is van ster A. Dit wordt verklaard door de tweede wet van Kepler (gelijke tijden = gelijke perken).

Open vragenreeks II: de leeftijd van M37

Je krijgt van een professor in Leuven de opdracht om te onderzoeken hoe oud M37 is. Om dit te doen krijg je een kleine amateur-telescoop waar een CCD-sensor in zit die gevoelig is voor het volledige zichtbare spectrum. Ook krijg je wat kleurenfilters (filters “B” en “V”) mee om voor je sensor te steken.

Vraag 1: achtergrondkennis.

Eerst moeten ons wat voorbereiden. We moeten weten wat M37 is en we moeten meer weten over dit type objecten voordat we écht kunnen beginnen aan de opdracht.



Figuur 1: De Plejaden zoals gefotografeerd door de Palomar telescoop.
Credit: NASA, ESA, AURA/Caltech, Palomar Observatory.



Figuur 2: NGC 6791 zoals gefotografeerd door de Sloan Digital Sky Survey. Credit: Sloan Digital Sky Survey.

a) Wat voor een object is M37 en hoe wordt dit soort object gevormd?

M37 is een open sterrenhoop. Deze is ooit ontstaan uit één gemeenschappelijke gaswolk.

b) De leeftijd van dit type objecten kun je meestal afleiden aan de hand van hun kleur (meer blauwe sterren of juist meer rode sterren). Vergelijk bijvoorbeeld de kleur en leeftijd van de Plejaden met die van de open sterrenhoop NGC 6791 en trek hieruit een conclusie over het verband tussen kleur en leeftijd.

De Plejaden zijn een voorbeeld van een jonge sterrenhoop (leeftijd ~ 100 Mjr), dat zie je aan de blauwe kleur. NGC 6791 is juist een hele oude open sterrenhoop (leeftijd ~ 8 Gjr) en bestaat alleen uit gele en rode sterren.

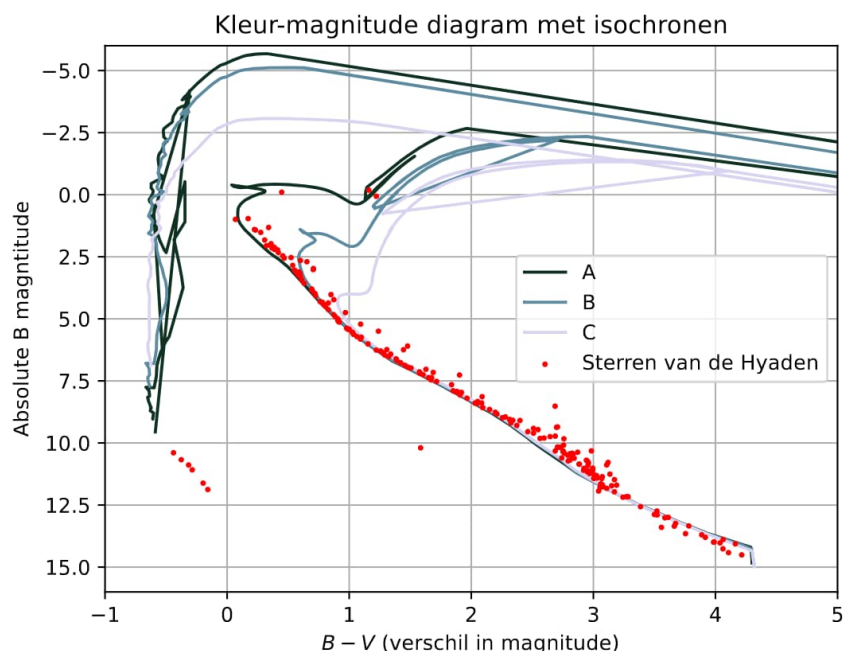
c) Wat is de oorzaak van deze kleurverandering met leeftijd?

De sterren in een open sterrenhoop zijn allemaal rond dezelfde tijd ontstaan uit hun gaswolk. Deze sterren verschillen in massa, sommige zijn zwaarder, verbruiken sneller hun brandstof, zijn heter en dus blauwer. Deze hete sterren zullen sneller veranderen in een rode reus en uiteindelijk sterven dan de koelere sterren met lagere massa. In oude sterrenhopen blijven alleen de koude sterren over en daardoor zijn oude sterrenhopen roder dan jonge sterrenhopen.

Vraag 2: kleur-magnitude diagram.

Op een Hertzsprung-Russell-diagram (HR-diagram) staat op de verticale as de absolute magnitude en op de horizontale as de temperatuur. Vaak werken we in de sterrenkunde bij sterrenhopen echter met een kleur-magnitude diagram. Hierbij staat op de verticale as de magnitude in één filter en op de horizontale as het verschil tussen twee filters (een filter met een langere golflengte en een filter met een kortere golflengte). De interpretatie van een kleurmagnitude diagram is gelijkaardig aan die van een HR-diagram. Omdat de afstand van alle sterren in een sterrenhoop tot de Aarde ongeveer gelijk is, maakt het namelijk niet uit of je op de verticale as absolute of schijnbare magnitude gebruikt. En omdat het makkelijker is om de kleur uit te drukken in een verschil in schijnbare magnitude tussen twee filters, staat er op de horizontale as niet temperatuur maar gewoon kleur, uitgedrukt in dit magnitudeverschil (in ons geval tussen de “B” en “V” filter). Kleur en temperatuur zijn namelijk aan elkaar gerelateerd; hoe blauwer een ster hoe heter en hoe roder een ster hoe koeler die is.

Hiernaast zie je een kleur-magnitude diagram dat gemaakt werd met de GAIA ruimtetelescoop van de Hyaden, een open sterrenhoop in het sterrenbeeld Stier. De sterren van de Hyaden zijn aangeduid met rode puntjes. Ook getekend met volle lijnen zijn “isochronen”. Elke isochroon is een theoretische sterpopulatie waarvan alle sterren dezelfde leeftijd hebben maar verschillend zijn in massa.



Figuur 3: Het kleur-magnitude diagram van de Hyaden gemaakt met data van de GAIA ruimtetelescoop. Let op dat de verticale as gespiegeld is: van hoog naar laag in plaats van laag naar hoog. De sterren van de Hyaden zijn aangeduid met rode puntjes. Ook getekend met volle lijnen zijn “isochronen”. Elk isochroon is een theoretische sterpopulatie waarvan alle sterren dezelfde leeftijd hebben maar verschillend zijn in massa.

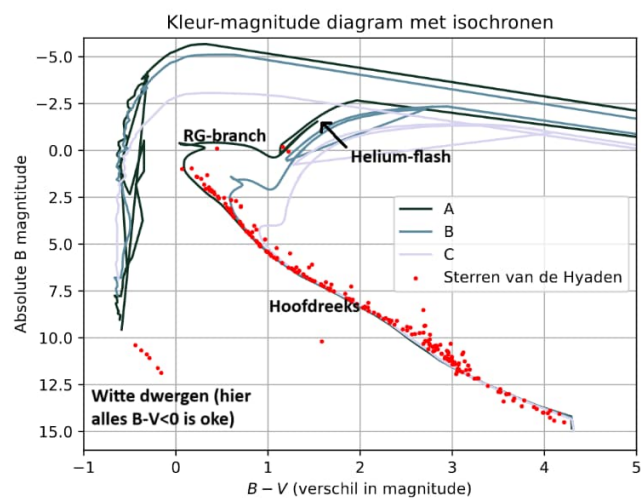
- a) Er zijn drie isochronen getekend: eentje voor 600 Mjr oude sterren, eentje met 2 Gjr oude sterren en eentje die uit 13 Gjr oude sterren bestaat. Welke isochroon (A, B, C) komt overeen met welke leeftijd?

A = 600 Mjr; B = 2 Gjr; C = 13 Gjr.

- b) Met welke isochroon komen de sterren van de Hyaden het beste overeen? Wat kun je dus concluderen over de leeftijd van de Hyaden?

Isochroon A, de leeftijd van de Hyaden bedraagt dus ongeveer 600 Mjr.

- c) Duid aan op isochroon A: de hoofdreeks, de rode-reuzentak, de helium flash en de witte dwergen.
- d) Zoals je ziet aan de hand van de isochronen zijn de heetste sterren van de hoofdreeks niet bij alle leeftijden aanwezig. Maar de koelere sterren in de hoofdreeks zijn in alle stadia van de sterrenhoop aanwezig. Hoe kan het dan dat we open sterrenhopen zien met alleen maar blauwe sterren, zoals de Plejaden? Waar zijn die rode sterren dan heen?



In de sterrenkunde zijn we vaak “biased” (i.e. worden we een beetje misleid) door de helderheid van objecten. Je ziet in een populatie voornamelijk de helderste sterren. De koele rode sterren in een sterrenhoop zijn meerdere malen zwakker dan de hete blauwe sterren. Dus hoewel de Plejaden meer rode sterren bevat dan blauwe sterren, schijnen de heetste sterren zo helder dat je alleen maar de blauwe sterren ziet. Het licht van die rode sterren wordt pas zichtbaar als de felle blauwe sterren zijn uitgedoofd. En zelfs in oude sterrenhopen is het rode licht dan nog vooral afkomstig van rode reuzen en niet van het zwakkere koude deel van de hoofdreeks.

Vraag 3: observaties.

Je besluit om op een vergelijkbare manier de leeftijd van M37 te bepalen als bij de Hyaden: een kleur-magnitude diagram. Dit doe je door de sterren in M37 in je twee filters waar te nemen: “B” en “V” filters. Dit staat voor “Blue” en “Visible” (= groen). Het doel is uiteindelijk om aan de hand van de magnitudes van sterren een kleur-magnitude diagram op te stellen. Je gebruikt hiervoor een kleine amateur-telescoop. Je voert je observaties uit door een flat, een bias, een light en een dark-frame te maken. Om je onderzoek te doen, heb je namelijk gekalibreerde science-

frames nodig. De integratietijden (= belichtingstijden) van het flat-frame, het dark-frame en het light-frame (t_{flat} , t_{dark} en t_{light}) zijn verschillend.

- a) Leg uit waarom je niet zomaar een opname kunt maken van de hemel met je telescoop en deze kunt gebruiken als een science-frame. Leg voor elk type correctie (bias, dark, flat) ook kort het achterliggende probleem uit (bijvoorbeeld: wat is een bias).

Een light-frame bevat naast signaal dat afkomstig is van de hemel ook een basis-signaalniveau, de “bias”. Daarnaast gloeit de sensor omdat deze niet afgekoeld is met vloeibare stikstof (amateurtelescoop), daardoor hebben de meeste pixels een thermische gloed die sterker wordt met langere integratietijd. Als je geen rekening houdt met deze twee effecten, dan zou je denken dat er meer flux van een ster komt dan er eigenlijk echt vandaan komt. Daarom moet je de bias en dark-frames van de light frame aftrekken. Ten slotte is niet elke pixel even gevoelig voor licht, kunnen er stofdeeltjes op de sensor liggen of vingerafdrukken op de lenzen of spiegels. Om hiervoor te corrigeren deel je door een flat-frame, zodat je er zeker van bent dat elke pixel in je uiteindelijke beeld even gevoelig is voor flux aan de hemel.

- b) Leg uit hoe elk van deze soorten frames gemaakt worden (telkens één zin is voldoende). Geef ook aan wanneer het belangrijk is dat je het frame in elk kleurenfilter maakt.

Flat: bekom je door een opname van een wit vlak te maken dat uit focus is (bijvoorbeeld de koepel, domeflat) of van de hemel wanneer het nog schemert (skyflat).

Bias: je maakt een opname met een integratietijd van 0 seconden, de shutter gaat dus niet open.

Dark: je maakt een opname met de shutter gesloten gedurende langere tijd.

Light: je opent 's nachts de shutter en maakt een opname van je target aan de hemel.

Moeten in elk kleurenfilter: de flat en de light, want hierbij komt er effectief licht op je CCD. Bij een flat kan dit belangrijk zijn omdat sommige onvolmaaktheden in de sensor bijvoorbeeld sterker zijn in bepaalde filters dan in andere filters.

- c) Leg uit met een formule hoe je deze frames zou combineren om het science-frame te bekomen.

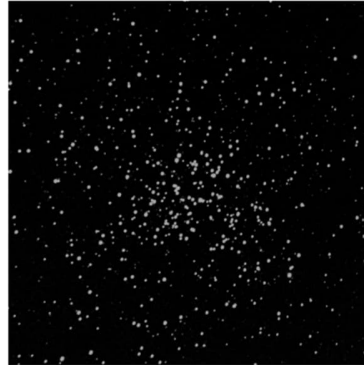
Tip: denk na hoe we de effecten van a) kunnen corrigeren. Stel dat je bijvoorbeeld een frame “A” en een frame “B” wil optellen, dan zou de formule $A+B$ zijn. Eigenlijk voer je deze formule uit voor elke pixel in je beeld.

We noemen de science frame S, de dark D, de bias B, de flat F en de light L. We noemen $\langle F \rangle$ de gemiddelde pixelwaarde van F. Dan is de juiste formule:

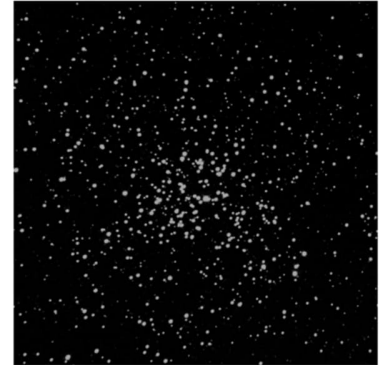
$$S = \frac{(L-B) - \frac{t_L}{t_D}(D-B)}{\frac{F}{\langle F \rangle}}$$

- d) Hoera! Na het toepassen van deze formule om tot een science frame te komen, heb je de volgende twee afbeeldingen in de B- en V-filters van M37.

Na alle kalibratiestappen die je net hebt gezet merk je echter dat er nog steeds een “schijn” over je foto heen zit. De lege delen van de foto (dus zonder sterren) zijn namelijk niet volledig zwart en bevatten toch nog wat licht. Hoe komt dit, en hoe zou je hiervoor kunnen corrigeren?



(a) B filter



(b) V filter

Zelfs na alle voorgaande stappen ben je er nog niet helemaal: je staat midden in de stad en de atmosfeer reflecteert de lichtvervuiling van de stad alle richtingen uit. Dit noemen we ook wel skyglow. Je kunt hiervoor corrigeren door de gemiddelde pixelwaarde te nemen in een leeg gebiedje van de foto en deze gemiddelde waarde van alle pixels af te trekken.

Vraag 4: analyse.

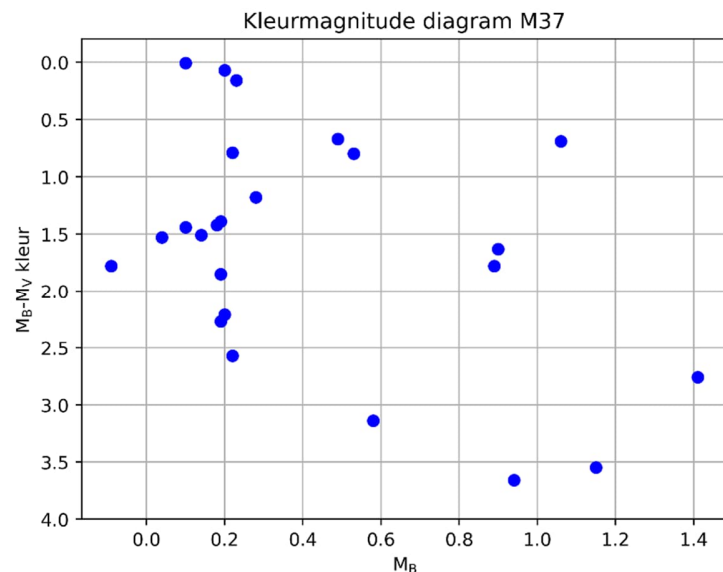
Nadat deze laatste correctie gebeurd is, reken je de schijnbare magnitude uit van 24 sterren die onderdeel zijn van M37. Je bekomt de volgende magnitude-waarden zoals weergegeven in de tabel hiernaast.

Op basis van de locatie in het kleur-magnitude diagram, vermoed je dat de laatste vier van deze sterren niet meer op de hoofdreeks staan en in de rode reuzen fase zitten. Verder heb je ook nog een literatuuronderzoek gedaan, waarbij je een publicatie vond (West, Frederick R., 1967) waarin is uitgerekend dat de afstandsmodulus van M37 gelijk is aan $\mu = m - M = 10,8$, waarbij μ de afstandsmodulus is, m de schijnbare magnitude en M de absolute magnitude.

Schijnbare B-magnitude	Schijnbare V-magnitude
10,81	10,71
10,87	10,67
10,96	10,73
11,59	11,37
11,47	10,98
11,60	11,07
11,98	11,70
12,22	12,04
12,19	12,00
12,31	12,17
12,24	12,14
12,33	12,29
12,58	12,67
12,65	12,46
13,01	12,81
13,07	12,88
13,37	13,15
13,94	13,36
14,46	13,52
14,35	13,20
13,56	12,15
12,43	11,53
12,58	11,69
11,49	10,43

- a) Maak aan de hand van de gemeten schijnbare magnitudes een overzichtelijke kleur-magnitude scatterplot, waarbij je op de verticale as absolute magnitudes gebruikt.
Tip: zoals die bij de Hyaden. Dit is het gemakkelijkste in Excel (of Spreadsheets, online Excel of een ander open source alternatief). Je kunt als alternatief ook het diagram met de hand tekenen.

Zie de figuur hiernaast.



- b) Heeft M37 een veel jongere of oudere sterpopulatie dan de Hyaden of zijn deze ongeveer gelijk in leeftijd?

We zien dat de meest blauwe sterren die nog op de hoofdreeks zitten zich ongeveer rond $B-V = 0,1$ bevinden. Dit is zeer vergelijkbaar met de sterpopulatie van de Hyaden. Deze twee objecten moeten dus een vergelijkbare leeftijd hebben.

- c) Welke van de isochronen uit het kleur-magnitude diagram van de Hyaden zou hier het beste passen? Wat kan je nu aan de hand van dit kleur-magnitude diagram zeggen over de leeftijd van M37 (extreem ruwe schatting, maar onderbouw je redenering)? Vergelijk jouw schatting met een artikel uit de literatuur, komt jouw schatting ruwweg overeen? Zo niet, bespreek dan hoe dit zou kunnen komen.

Isochroon A van 600 Mjr past hier dus ook het beste dus onze ruwe schatting is ongeveer 600 Mjr. Mermilliod et al. (1996) geven een schatting van 400-500 Mjr en Cordoni et al. (2018) geven een schatting van 550 Mjr. We zitten dus dicht in de buurt!

Open vragenreeks III: accretie

Een quasar is een actief sterrenstelsel met een enorm grote lichtkracht. De uitgezonden straling komt hierbij van de accretie van het omringende gas op een supermassief zwart gat (SMBH) in het centrum van het sterrenstelsel. Het gas rond het zwarte gat bevindt zich in een *accretieschijf*. Enkele jaren geleden is de quasar ULAS J112001.48+064124.3 met een roodverschuiving van $z = 7,085$ gedetecteerd (Mortlock et al., 2011). Deze quasar bevat een SMBH van $2 \times 10^9 M_{\odot}$ (waarbij $M_{\odot}$ de massa van de Zon voorstelt).

Dit betekent dat slechts 0,77 miljard jaar na de Big Bang reeds zwarte gaten konden bestaan met zulke hoge massa's. Dit is echter in tegenstrijd met de huidige theorie van de evolutie van SMBH's, waarbij een zwart gat met een massa rond $100 M_{\odot}$ via accretie groeit tot de massa van het SMBH. Berekeningen tonen namelijk aan dat dit proces langer zou moeten duren dan de leeftijd van het universum op dat moment.

Ga ervan uit dat het gas in de accretieschijf rond een zwart gat met massa M bestaat uit volledig geïoniseerd waterstof. Op een stukje gas werken twee krachten: de zwaartekracht van het zwarte gat en de stralingskracht van de straling die wordt uitgezonden door materiaal dat op het zwarte gat valt. De zwaartekracht is gegeven door

$$F_g = G \frac{\rho M}{r^2}$$

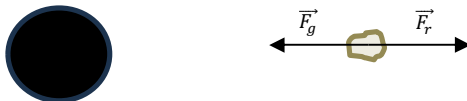
met r de afstand van het stuk gas tot het zwarte gat en ρ de massadichtheid van het gas op dit punt. De stralingskracht op het stukje gas is gegeven door

$$F_r = \frac{\kappa \rho L}{4\pi r^2 c}$$

met c de lichtsnelheid, κ de opaciteit (een maat voor de lichtondoorlatendheid) van het gas en L de lichtkracht van de accretieschijf.

Vraag 1.

- a) Maak een tekening van de krachten die werken op een stukje gas in de accretieschijf. Wat is de richting en de zin van deze krachten ten opzichte van het zwarte gat?



- b) Als de lichtkracht te groot is, kan de stralingskracht zo groot worden dat de accretieschijf wordt ‘weggeblazen’. Toon aan dat de maximale lichtkracht die het systeem kan hebben (de zogenaamde *Eddington lichtkracht* L_{Edd}), waarbij de zwaartekracht en de stralingskracht elkaar balanceren, gelijk is aan

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}.$$

Als de stralingskracht de zwaartekracht balanceert, geldt dus dat

$$F_g = F_r$$

Dan volgt hieruit

$$G \frac{\rho M}{r^2} = \frac{\kappa \rho L_{Edd}}{4\pi r^2 c}$$

zodat

$$L_{Edd} = \frac{4\pi cGM}{\kappa}$$

- c) Bereken de Eddington lichtkracht voor een zwart gat met een massa van $100 M_{\odot}$. Druk je antwoord uit in zonslichtkrachten (eenheid $L_{\odot}$). Je mag hier (en doorheen de rest van deze opgave) de waarde $\kappa \approx 0,04 \text{ m}^2/\text{kg}$ gebruiken voor volledig geïoniseerd waterstof.

We maken gebruik van de gekende constanten in bovenstaande formule:

Universele gravitatieconstante: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$

Lichtsnelheid: $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Massa van de Zon: $M_{\odot} = 1,9884 \times 10^{30} \text{ kg}$

Lichtkracht van de Zon: $L_{\odot} = 3,839 \cdot 10^{26} \text{ W}$

Voor $M = 100 M_{\odot}$ bekomen we dan

$$\begin{aligned} L_{Edd} &= \frac{4\pi(2,998 \cdot 10^8)(6,67 \cdot 10^{-11}) \cdot 100 \cdot (1,9884 \cdot 10^{30})}{0,04} \text{ J/s} \\ &= 1,249 \cdot 10^{33} \text{ W} \\ &= 3,25 \cdot 10^6 L_{\odot} \end{aligned}$$

Vraag 2.

De maximale accretiesnelheid $\dot{M}$ van materiaal op het zwarte gat wordt gegeven door

$$\dot{M} = \frac{L_{Edd}}{\eta c^2}$$

waarbij η de zogenoemde accretie-efficiëntie is.

- a) Bereken de maximale accretiesnelheid voor een zwart gat met een massa van $100 M_{\odot}$. Neem aan dat $\eta = 0,1$.

Druk het antwoord uit in $M_{\odot}/\text{jaar}$.

We gebruiken het resultaat uit vraag 1 c en vinden aldus

$$\dot{M} = \frac{L_{Edd}}{\eta c^2} = \frac{1,249 \cdot 10^{33} \text{ W}}{0,1 \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 1,3896 \cdot 10^{17} \text{ kg/s}$$

Omvormen naar de typische eenheden levert

$$\dot{M} = 1,3896 \cdot 10^{17} \text{ kg/s} \cdot \frac{31557600 \text{ s}}{1,9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \frac{M_{\odot}}{\text{jaar}} = 2,2 \cdot 10^{-6} \frac{M_{\odot}}{\text{jaar}}$$

- b) De massa van het zwarte gat groeit exponentieel volgens

$$M(t) = M_0 e^{t/t_{Edd}}$$

waarbij t_{Edd} de Eddington tijdschaal is en M_0 de initiële massa van het zwarte gat. De Eddington tijdschaal is de tijd die nodig is voor het zwarte gat om met een factor e te groeien.

Gebruikmakend van $\dot{M} = \frac{dM}{dt}$, toon aan dat

$$t_{Edd} = M/\dot{M}$$

Het afleiden van $M(t)$ naar t levert

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = \frac{M_0}{t_{Edd}} e^{t/t_{Edd}} = \frac{M}{t_{Edd}}$$

Hieruit volgt dan uiteraard meteen dat

$$t_{Edd} = \frac{M}{\dot{M}}$$

- c) Bereken nu de tijd die nodig is voor het zwarte gat om via de maximale accretiesnelheid te groeien van $100 M_{\odot}$ tot $2 \cdot 10^9 M_{\odot}$. Je mag weer aannemen dat $\eta = 0,1$.
Druk het antwoord uit in jaar.

We weten dat $M(0) = M_0 = 100 M_{\odot}$ en we zoeken het tijdstip t_* waarop

$$M(t_*) = M_0 e^{t_*/t_{Edd}} = 2 \cdot 10^9 M_{\odot}.$$

We willen t_* isoleren uit deze formule en krijgen

$$\frac{M(t_*)}{M_0} = e^{\frac{t_*}{t_{Edd}}}$$

zodat

$$\ln\left(\frac{M(t_*)}{M_0}\right) = \frac{t_*}{t_{Edd}}$$

waaruit dan uiteindelijk volgt dat

$$t_* = \ln\left(\frac{M(t_*)}{M_0}\right) t_{Edd}$$

Nu moet enkel de Eddington tijdschaal nog berekend worden.

Gebruikmakend van het resultaat uit vraag 2 a, vinden we

$$t_{Edd} = 100 M_{\odot} / (2,2 \cdot 10^{-6} \frac{M_{\odot}}{\text{jaar}}) = 4,55 \cdot 10^7 \text{ jaar}.$$

Dit invullen geeft dan

$$t_* = \ln\left(\frac{2 \cdot 10^9}{100}\right) \cdot 4,55 \cdot 10^7 = 0,76 \text{ Gyr}$$

- d) Vergelijk je antwoord uit het vorige luik van deze vraag met de leeftijd van het universum op roodverschuiving $z = 7,085$. Beschrijf kort een alternatieve theorie voor het ontstaan van zulke SMBH's in het vroege heelal.

De leeftijd van het universum op roodverschuiving $z = 7,085$ is ongeveer $0,77 \text{ Gyr}$. Dit betekent dus dat de tijd die nodig is voor een zwart gat om te groeien van $100 M_{\odot}$ tot $2 \cdot 10^9 M_{\odot}$ via de maximale accretiesnelheid (vraag 2 c) ongeveer even lang is als de leeftijd van het universum op dat moment. Let wel dat de tijd die je hebt gevonden in vraag 2 c ervan uitgaat dat het zwarte gat voortdurend groeit aan de *maximale* accretiesnelheid. Dit is erg onwaarschijnlijk en de tijd die je hebt gevonden is dus een ondergrens. Dit maakt dus dat het onwaarschijnlijk lijkt dat SMBH's in het vroege universum zijn ontstaan door continue accretie van zwarte gaten met stellaire massa's. Een mogelijke alternatieve theorie is dat er *supermassieve sterren* bestonden in het vroege universum die dan zouden evolueren naar zwarte gaten met massa's van reeds $100000 M_{\odot}$. Deze zwarte gaten zouden dan via accretie wel kunnen groeien tot een SMBH.

Open vragenreeks IV: straling in het interstellair medium

We detecteren spectrale lijnen in sterrenstelsels om meer te weten te komen over het interstellair medium, het medium dat tussen sterren inhangt en voornamelijk uit gas en stof bestaat. Dit zijn lijnen op specifieke frequenties in het spectrum waar het interstellair gas licht heeft geabsorbeerd of heeft uitgestraald. De energie van straling die door het interstellair medium gaat, drukken we uit in de energiedichtheid ρ_ν beschreven met een zwartlichaamstraler volgens:

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T_{rad}) \quad (1)$$

waarbij ν de frequentie en T_{rad} de temperatuur is van de zwartlichaamstraler; c is de lichtsnelheid. Deze straling beïnvloedt de kwantumtransities van elektronen gebonden aan de kernen van atomen en moleculen in het interstellair gas. Wanneer een elektron gebonden is, spreken wij over een elektron in een elektronniveau n . Voor de spectrale lijnen springen deze elektronen als het ware tussen twee verschillende elektronniveaus, met een niveau dat hoger is (n_u) en een niveau dat lager is (n_ℓ). Elektronen absorberen of verliezen energie in de vorm van licht wanneer deze van elektronniveau veranderen, wat wij dan zien als een spectrale lijn. Het medium is in thermisch evenwicht als de verhouding tussen het aantal elektronen in een willekeurig hoog elektronniveau n_u en laag elektronniveau n_ℓ beschreven wordt volgens:

$$\frac{n_u}{n_\ell} = \frac{g_u}{g_\ell} \exp\left(\frac{E_\ell - E_u}{kT}\right) \quad (2)$$

met $E_\ell - E_u$ het verschil in bindingsenergie tussen twee elektronniveaus, k de constante van Boltzmann en g_u en g_ℓ de kwantumdegeneratie van een elektronniveau, ook wel een intrinsieke voorkeur die een chemisch element heeft voor de verdeling van de elektronen over de mogelijke elektronniveaus op basis van enkel straling. We gaan er thans vanuit dat het medium enkel energie kan krijgen en verliezen door middel van straling.

Vraag 1.

- a) Op welke manieren kunnen de transities van elektronen plaatsvinden als we botsingen negeren? Zoek hiervoor de drie mogelijkheden op en wat het tempo is van de transities in functie van de Einstein coëfficiënten. Welke processen zijn gelinkt aan deze coëfficiënten?

Spontane emissie: verval van een elektron naar een lager energieniveau. Deze is gelinkt aan de Einstein coëfficiënt $A_{u\ell}$.

Absorptie: absorptie van een foton door een elektron waardoor dit naar een hoger energieniveau gaat. Deze is gelinkt aan de Einstein coëfficiënt $B_{\ell u}$.

Gestimuleerde emissie: resonantie van een foton met een elektron waardoor deze naar een lager energieniveau springt en een foton van gelijke frequentie uitstraalt. Deze is gelinkt aan de Einstein coëfficiënt $B_{u\ell}$.

- b) Wanneer is de verhouding tussen verschillende elektronniveaus in evenwicht? Druk dit uit in de Einstein coëfficiënten $B_{u\ell}$, $B_{\ell u}$ en $A_{u\ell}$.

Binnen het interstellair medium kunnen transitie elektronen verplaatsen op verschillende manieren. Voor een willekeurig niveau n_u kunnen elektronen van een lagere schil naar deze schil springen via absorptie:

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right)_{\ell \rightarrow u} = B_{\ell u} \rho_\nu n_\ell \quad (3)$$

met $B_{u\ell}$ de Einstein absorptiecoëfficiënt, ρ_ν de energiedichtheid van het interstellair radiatieveld (ISRF) rond dit gebied, en n_ℓ de elektronendichtheid die gebonden zit aan niveau ℓ . Elektronen kunnen ook naar een lager niveau springen door middel van verschillende emissieprocessen, spontane emissie en gestimuleerde emissie (ook wel bekend als negatieve absorptie):

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right)_{u \rightarrow \ell} = -(A_{u\ell} + B_{u\ell} \rho_\nu) n_u \quad (4)$$

met $A_{u\ell}$ de Einstein spontane emissiecoëfficiënt en $B_{u\ell}$ de Einstein gestimuleerde emissiecoëfficiënt. Het totale tempo van overgangen van en naar u is niets anders dan de som van alle processen die kunnen plaatsvinden voor niveau u :

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right) = B_{\ell u} \rho_\nu n_\ell - (A_{u\ell} + B_{u\ell} \rho_\nu) n_u \quad (5)$$

- c) Laat zien dat de Einstein coëfficiënten $B_{u\ell}$ en $B_{\ell u}$ zich verhouden tot $A_{u\ell}$ volgens onderstaande vergelijkingen, als we uitgaan van een thermisch evenwicht:

$$B_{u\ell} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} A_{u\ell}$$

$$B_{\ell u} = \frac{g_u c^3}{8\pi g_\ell h \nu^3} A_{u\ell}$$

De andere variabelen in deze vergelijking zijn de lichtsnelheid c , de constante van Planck h , de frequentie ν en g_u en g_ℓ de eerder beschreven kwantumdegeneratie. Je kunt deze verhoudingen vinden door de toestanden te beschrijven onder extreme omstandigheden van temperaturen ($T \rightarrow 0$ en $T \rightarrow \infty$).

Tip: de afleiding maakt gebruik van de variabele $n_f(\nu, T_{rad})$, het fotonenbezettingsgetal. Dit geeft de verdeling van het aantal fotonen met een bepaalde frequentie en temperatuur.

n_f wordt gegeven door de Bose-Einstein vergelijking:

$$n_f = \frac{1}{\frac{h\nu}{e^{kT_{rad}}} - 1} \quad (6)$$

Wanneer het systeem in thermisch evenwicht is, betekent dat het systeem ook in statistisch evenwicht is: netto verliest het niveau u geen elektronen. Dit betekent dat het totale tempo gelijk is aan 0 (met deze redenering mag je ook zeggen dat het tempo van de processen die elektronen van niveau u weghalen gelijk is aan het tempo van de processen die elektronen naar niveau u verplaatsen). Onder deze voorwaarden kunnen we vergelijking (5) analyseren in extreme stralingsvelden. De enige van belang is een oneindig warme zwarte straler. Daarmee herleidt vergelijking (5) zich naar:

$$0 = B_{\ell u} \rho_\nu n_\ell - B_{u\ell} \rho_\nu n_u$$

zodat

$$B_{\ell u} = \frac{n_u}{n_\ell} B_{u\ell}$$

In deze omstandigheden nadert $e^{\frac{E_\ell - E_u}{kT}}$ naar 1, zodat vergelijking (2) zicht herleidt tot

$$\frac{n_u}{n_\ell} = \frac{g_u}{g_\ell}$$

Dit betekent dat we een exacte verhouding hebben voor absorptie en gestimuleerde emissie:

$$B_{\ell u} = \frac{g_u}{g_\ell} B_{u\ell} \quad (7)$$

Hiermee kunnen we ook een relatie vinden tussen de Einstein coëfficiënten voor alle mogelijke omstandigheden door de energiedichtheid van het ISRF:

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= \frac{A_{u\ell} n_u}{B_{\ell u} n_\ell - B_{u\ell} n_u} \\ &= \frac{\frac{A_{u\ell} n_u}{B_{u\ell} n_u}}{\frac{B_{\ell u} n_\ell}{B_{u\ell} n_u} - \frac{B_{u\ell} n_u}{B_{u\ell} n_u}} \\ &= \frac{\frac{A_{u\ell}}{B_{u\ell}}}{\frac{g_u g_\ell}{g_\ell g_u} e^{\frac{E_u - E_\ell}{kT}} - 1} \\ &= \frac{\frac{A_{u\ell}}{B_{u\ell}}}{e^{\frac{E_u - E_\ell}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

zodat

$$\rho_\nu = \frac{\frac{A_{u\ell}}{B_{u\ell}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (8)$$

Anderzijds weten we uit (1) dat $\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T)$ met

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Waaruit volgt dat

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

en dus

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (9)$$

Door het combineren van (8) en (9) vinden we

$$B_{u\ell} = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} A_{u\ell}$$

Verder volgt hieruit met (7) dat

$$B_{\ell u} = \frac{g_u c^3}{8\pi g_\ell h\nu^3} A_{u\ell}$$

Vraag 2.

De elektronen kunnen ook transitie maken door middel van botsingen. Als het interstellair medium bestaat uit een gas waarbij de elektronen tussen twee verschillende niveaus kunnen springen, wordt de tempoverhouding tussen botsingsexcitatie en de-excitatie gelijkgesteld aan:

$$\frac{\gamma_{01}}{\gamma_{10}} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(\frac{E_0 - E_1}{kT_{gas}}\right)$$

met T_{gas} de kinetische temperatuur van het gas (let op: dit is niet hetzelfde als de temperatuur van een zwartlichaamstraler), γ_{10} en γ_{01} de coëfficiënten die de waarschijnlijkheden van transitie voor botsingen weergeven, en g_0 en g_1 de intrinsieke voorkeur die elektronen hebben om in een bepaalde toestand te zijn op basis van enkel botsingen.

a) Welke processen vinden in het interstellair medium plaats als botsingen wel plaatsvinden?

Spontane emissie: verval van een elektron naar een lager energieniveau.

Absorptie: absorptie van een foton door een elektron waardoor dit naar een hoger energieniveau gaat.

Gestimuleerde emissie: resonantie van een foton met een elektron waardoor deze naar een lager energieniveau springt en een foton van gelijke frequentie uitstraalt.

Botsingsexcitatie (collisionele excitatie): botsingen tussen deeltjes waarvan een deel van de botsingsenergie ervoor zorgt dat elektronen exciteren (i.e. naar een hoger energie niveau gaan).

Collisionele de-excitatie: botsingen tussen deeltjes waarvan energie opgeslagen in elektronen verloren gaat als fotonen tijdens de botsing.

b) Laat zien dat we de verhouding tussen elektronenniveaus n_1/n_0 in termen van A_{10} , γ_{10} en γ_{01} kunnen beschrijven op de volgende manier:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{n_e \gamma_{01} + \frac{g_1}{g_0} A_{10} n_f}{n_e \gamma_{10} + (1 + n_f) A_{10}}$$

Tip: splits je antwoord op vraag a) in termen van transitie die afhankelijk zijn van de elektronendichtheid en transitie die dit niet zijn.

Wanneer we botsingen introduceren, moeten we vergelijking (3) herschrijven als

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right)_{\ell \rightarrow u} = B_{\ell u} \rho_\nu n_\ell + C_{\ell u} n_\ell = B_{\ell u} \rho_\nu n_\ell + n_e \gamma_{\ell u} n_\ell$$

met n_e de dichtheid van vrije elektronen die kunnen botsen met gebonden elektronen, en $\gamma_{\ell u}$ de collisionele excitatiecoëfficiënt.

Vergelijking (4) verandert naar

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right)_{u \rightarrow \ell} = -(A_{u\ell} + B_{u\ell} \rho_\nu) n_u - C_{u\ell} n_u = -(A_{u\ell} + B_{u\ell} \rho_\nu) n_u - n_e \gamma_{u\ell} n_u$$

met $\gamma_{u\ell}$ de collisionele de-excitatiecoëfficiënt.

Het introduceren van botsingen betekent dat thermisch evenwicht verloren kan gaan, maar statistisch evenwicht blijft behouden. Hiermee hebben we de vergelijking voor alle mogelijke processen van elektronentransities in niveau u :

$$\left(\frac{dn_u}{dt}\right) = \left(n_e \gamma_{\ell u} + \frac{g_u}{g_\ell} A_{u\ell} n_f\right) n_\ell - \left(n_e \gamma_{u\ell} + (1 + n_f) A_{u\ell}\right) n_u = 0$$

Als we $u = 1$ en $\ell = 0$ stellen voor een twee-niveau systeem, krijgen we:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{n_e \gamma_{01} + \frac{g_1}{g_0} A_{10} n_f}{n_e \gamma_{10} + (1 + n_f) A_{10}}$$



Dit is het einde van de eerste ronde van
de Vlaamse Sterrenkunde Olympiade 2025.

